1. Einführung

Dieses Seminar beinhaltet einen Satz aus der berechenbaren Analysis. Die berechenbare Analysis beschäftigt sich mit der überabzählbaren Menge der reellen Zahlen. Dieses Seminar beschränkt sich größtenteils auf die reellen Zahlen innerhalb des Einheitsintervalls.
Zuerst folgt eine kurze Einführung in die Begriffe und Definitionen. Anschließend wird der folgende Satz anschaulich bewiesen:

"Es gibt eine rekursiv-aufzählbare, aber nicht rekursive Menge natürlicher Zahlen derart, daß die charakteristische Folge dieser Menge bis auf eine additive Konstante die gleiche Kolmogorovkomplexität wie die Folge 0^w hat."

Nach dem Beweis dieses Satzes, der auf den ersten Blick wenig Bezug zur reellen Analysis zu haben scheint, wird seine Bedeutung in der berechenbaren Analysis gezeigt, also wie die Kolmogorovkomplexität einer Folge mit der Berechenbarkeit der reellen Zahlen zusammenhängt.

Zum Verständnis des Seminars sind Vorkenntnisse aus der Berechenbarkeit und der berechenbaren Analysis notwendig, wie sie in einführenden Kursen zu diesen Themen vermittelt werden. Für die Berechnung wird hier nicht auf einen speziellen Rechnertyp, sondern auf ein Modell der Turingmaschine zurückgegriffen.

Dieser Satz wurde im Jahr 2001 unabhängig von Downey, Hirschfeldt und Nies, siehe [5] und von Vereshchagin [8] bewiesen.

2. Vorbereitende Begriffe

In diesem Kapitel werden einige Definitionen und Begriffe vorgestellt. Das meiste ist bekannt aus früheren Kursen. Einige Definition folgen deshalb, weil sie in unterschiedlichen Unterlagen auch unterschiedlich benutzt werden. Weiterführende Definitionen folgen im Laufe des Vortrags.

- Berechenbare Funktionen
  Die Menge der partiell rekursiven Funktionen N **à** N wird mit P(1) bezeichnet. Die echte Teilmenge der total rekursiven Funktionen N **à** N wird mit R(1) bezeichnet.

- Definition: rekursiv aufzählbare Menge
  Eine Menge $A \subseteq N$ heißt rekursiv aufzählbar, wenn sie die Definitionsmenge einer partiell rekursiven Funktion f : N **à** N ist.

- Satz über rekursiv aufzählbare Mengen
  Eine nichtleere Menge A ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn es eine total rekursive Funktion f gibt mit A = Bild(f).

- Die Cantorsche Tupelfunktion
  Die Cantorsche Tupelfunktion ist eine total rekursive bijektive Funktion $N \times N$ **à** N.
  Sie wird durch eckige Klammern bezeichnet: $<x,y> := ½ * (x + y)(x + y + 1) + y$.

- Die Standardnumerierungen φ und ψ
  Die Standardnumerierung φ ist eine surjektive Funktion N **à** P(1). Jeder natürlichen Zahl e ist eine berechenbare Funktion f :$\subseteq$ N **à** N zugeordnet mit der Eigenschaft: $f = \varphi(e)$.
  Die Standardnumerierung φ erfüllt das utm-Theorem und das smn-Theorem.
  Die Standardnumerierung ψ ist eine surjektive Funktion N **à** { f : $\subseteq \Sigma^*$ **à** Σ^* **|** f ist berechenbar}. Jeder natürlichen Zahl e wird eine berechenbare Funktion f :$\subseteq \Sigma^*$ **à** Σ^* zu geordnet mit der Eigenschaft $f = \psi(e)$.

- Definition: Folgen über Σ
  Eine totale Funktion p N **à** Σ heißt Folge über Σ.
  Die Menge aller Folgen über Σ wird mit Σ^N bezeichnet
  Das Präfix der Länge n einer Folge p = p(0)p(1) ... p(n-1) wird mit p ^n bezeichnet.
  Sei A eine rekursiv aufzählbare Menge und X_A ihre charakteristische Funktion, dann heißt X_A auch charakteristische Folge der Menge A

- Definition: Berechenbare und linksberechenbare reelle Zahlen
  Eine reelle Zahl $x \in R$ heißt berechenbar, wenn es eine berechenbare konvergente Folge rationaler Zahlen $xi \in Q$ gibt mit der Eigenschaft: $|x - xi| \le 2^{-i}$ für alle $i \in N$.
  Eine reelle Zahl $x \in R$ heißt linksberechenbar, wenn sie der Grenzwert einer berechenbaren monoton steigenden Folge rationaler Zahlen ist.

- In diesem Seminar wird, wenn nicht anders angegeben, nur das binäre Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ benutzt.

- Definition: Binärdarstellung
  Die Funktion b: Σ^N **à** [0;1] mit b(p) := $\mathrm{Sum}_{i=0}^{\infty}$ (p(i) * $2^{-(p+1)}$) heißt Binärdarstellung.
  In diesem Vortrag wird statt b(p) eine anschaulichere Schreibweise verwendet. Die reelle Zahl $b(p) \in [0.1]$ wird mit 0.p bezeichnet.
  Die Binärdarstellung ist nicht identisch mit der Dualdarstellung reeller Zahlen. Die Binärdarstellung kann nur Zahlen aus [0,1] darstellen und benutzt nur das binäre Alphabet ohne Dezimalpunkt.

3. Die Kolmogorovkomplexität

3.1. Zweck der Definition

Die Kolmogorovkomplexität beschreibt den "Aufwand" , der notwendig ist, um eine Zeichenkette w auf das Ausgabeband zu schreiben, bzw. ob es möglich ist, das Ausgabewort w durch ein möglichst kürzeres Wort v zu beschreiben, wobei beide Wörter aus dem gleichen Alphabet konstruiert sind. Dazu zwei Beispiele aus der Umgangssprache. Benutzt wird in diesen Beispielen das lateinische Alphabet einschließlich Umlaute, Leerzeichen und Ziffern.

Beispiel 1:
Um das Wort w = "Komplexität" der Länge 11 zu beschreiben, ist folgender Satz v notwendig: "Das Wort w ist ‚Komplexität' " . Der Satz v ist deutlich länger (27) als das zu beschreibende Wort w. Nach dieser Definition des Alphabets ist v ein Wort über dem Alphabet.

Beispiel 2:
Die Zeichenkette v = "Das Wort w besteht nur aus 2hoch200 Nullen" beschreibt das Wort w der Länge 2^200. In diesem Fall läßt sich das Wort w durch ein wesentlich kürzeres Wort beschreiben.
Für unsere Funktion f, die auf Zeichenketten definiert ist, bedeutet ‚Beschreiben' genau, daß die Funktion f als Eingabe das Wort v erhält und das Wort w ausgibt.

<u>Satz 3.1.:</u>
Sei Γ ein beliebiges Alphabet mit $\gamma>1$ Elementen und $n > 0$ eine beliebige natürliche Zahl.
Dann gilt:
Nicht jedes Wort w der Länge n läßt sich mit einer Funktion $f \subseteq \{\Sigma^* \textbf{ à } \Sigma^*\}$ durch ein kürzeres Wort v ausdrücken.

Beweis:
Es gibt γ^n Wörter der Länge n. Die Menge der kürzeren Wörter beschreibt die Summe:

$$1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 \ldots \gamma^{(n-1)} = \mathrm{Sum}_{i=0}^{(n-1)} (\gamma^i) = (\gamma^n - 1)/(\gamma - 1).$$

Es gilt: $\gamma^n > (\gamma^n - 1)/(\gamma - 1)$.

Um alle γ^n Wörter der Länge n durch kürzere zu beschreiben, sind genau so viele kürzere Beschreibungen notwendig. Es existieren aber maximal $(\gamma^n - 1)/(\gamma - 1)$ kürzere Beschreibungen.

Eine "Superfunktion", die für alle Wörter eine kürzere Beschreibung liefert, kann es nicht geben.

3.2. Definition

Sei $f{:}\subseteq \Sigma^* \textbf{ à } \Sigma^*$ eine berechenbare Funktion und w eine Zeichenkette $\in \Sigma^*$. Die Kolmogorovkomplexität bezüglich einer Funktion f ist definiert:

$$K_f(w) = \begin{cases} \min \{ |v| \mid f(v) = w \} & \text{falls } w \in \mathrm{Bild}(f) \\ \infty & \text{falls } w \notin \mathrm{Bild}(f) \end{cases}$$

Also liefert $K_f(w)$ die Länge der kürzesten Zeichenkette v, mit der f die Zeichenkette w produziert, falls die Zeichenkette w überhaupt von f geliefert wird.

3.3. Präfixfreiheit

Für die Definition der Kolmogorovkomplexität wird folgende Einschränkung gemacht:
Für alle $v,w \in \mathrm{Def}(f)$ mit $v \neq w$ gilt: v ist kein Präfix von w.
Diese Einschränkung ist aus folgendem Grund zweckmäßig:

Betrachtet wird eine berechenbare Beschreibungsfunktion $f \in \{\Sigma^*$ **à** $\Sigma^*\}$. Sie bildet endliche Zeichenketten auf endliche Zeichenketten ab. Die Turingmaschine M_f berechnet die Funktion f. Die Turingmaschine M_f hat ein Eingabe- und ein Ausgabeband. Das Bandalphabet Γ besteht aus den Zeichen aus Σ und einem Leerzeichen B: $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$. Das Alphabet Γ mit einem Leerzeichen ist bei Funktionen auf endlichen Zeichenketten sinnvoll, weil das Leerzeichen, das nach dem Ende eines Wortes steht, dessen Ende markiert.

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ die nicht präfixfreie Definitionsmenge der Funktion $f \in \{\Sigma^*$ **à** $\Sigma^*\}$. Dann gibt es Wörter $v,w \in A$ mit v ist ein Präfix w. Die Turingmaschine M_f, die auf Eingaben v und w terminiert, muß nach dem Lesen des Wortes v entscheiden, ob nach v ein Suffix folgt. Dazu muß sie über das Ende von v lesen und beim Lesen eines Leerzeichens entscheidet sie, daß sie ein Wort v gelesen hat, das zum Definitionsbereich gehört. Falls auf v kein Leerzeichen folgt, liest die Maschine M_f weiter. Entweder liest sie ein Wort aus dem Definitionsbereich oder nicht.

Beide Fälle sind nicht zufriedenstellend. Wenn auf v ein Leerzeichen folgt, liest die Maschine ein Zeichen mehr als die Länge des Wortes v. Wenn auf v kein Leerzeichen folgt, liest sie weiter und terminiert möglicherweise gar nicht. Bei der Betrachtung der Kolmogorovkomplexität eines Wortes bezüglich einer Funktion ist aber von Interesse, eine möglichst kurze Beschreibung zu lesen.

Diese Situation vermeidet man, indem man die Maschine so konstruiert, daß sie den Lesekopf über dem Eingabeband nicht nach links bewegen darf, wie eine Typ 2 Maschine. Die Konsequenz ist, daß kein Wort w in der Definitionsmenge von f enthalten sein kann, wenn ein Wort v mit v = Präfix(w) in der Definitionsmenge enthalten ist.
Die Einschränkung auf präfixfreie Definitionsmengen hat einen praktischen Hintergrund. Das Eingabeband wird Nachrichtenkanal betrachtet. Die eintreffenden Nachrichten sollen möglichst simultan übersetzt/dekodiert werden.

In diesem Seminar wird die Kolmogorovkomplexität ausschließlich auf Funktionen mit präfixfreien Definitionsmengen angewendet.

3.4. Selbstbegrenzende und universell selbstbegrenzende Funktionen

Definition: Selbstbegrenzende Funktion
Eine Funktion $f :\subseteq \Sigma^*$ **à** Σ^* heißt selbstbegrenzend, wenn ihre Definitionsmenge präfixfrei ist.

Definition: Universelle selbstbegrenzende Funktion
Eine Funktion f heißt universell selbstbegrenzend, wenn sie selbstbegrenzend und berechenbar ist und für jede berechenbare Funktion $g :\subseteq \Sigma^*$ **à** Σ^* eine Konstante $c_g \in N$ existiert so daß für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:
$K_f(w) \leq K_g(w) + c_g$

Zu beachten ist, daß die Konstante c_g von der Funktion g abhängt, aber nicht von der Zeichenkette w.

Satz 3.4.:
<u>Es gibt eine universelle selbstbegrenzende Funktion.</u>

Beweis:
Für den Beweis wird die Standardnumerierung ψ und eine wichtige Eigenschaft der Standardnumerierung, das utm Theorem, benutzt. Die Standardnumerierung ψ numeriert alle berechenbaren Funktionen, also auch die Funktionen mit nicht präfixfreier Definitionsmenge.
Deshalb wird eine Numerierung ψ' aller selbstbegrenzenden berechenbaren Funktionen $\in$ $\{\Sigma^*$ **à** $\Sigma^*\}$ definiert:
Jede berechenbare Funktion ψ_e hat eine rekursiv aufzählbare Menge als Definitionsmenge.

Die Funktion $u_\psi :\subseteq N \times \Sigma^*$ **à** Σ^* bezeichnet die (gemäß utm Theorem berechenbare) universelle Funktion zu ψ.

Die Definitionsmenge $Def(u_\psi) = \{ (e,w) \in N \times \Sigma^* \mid w \in Def(\psi_e) \}$ ist rekursiv aufzählbar durch eine Funktion f: N **à** $N \times \Sigma^*$. $Def(u_\psi) = \{ f(0), f(1), f(2), ... \}$

Man definiert: $A_e[n] := \{ w \in \Sigma^* \mid (e,w) \in \{ f(0), f(1), f(2),...f(n-1) \} \}$.

Die Menge $A_e[n]$ enthält für jede Funktion ψ_e maximal n Zahlen aus ihrem Definitionsbereich Def (ψ_e).

Es gilt: $\cup_n A_e[n] = Def(\psi_e)$.

Parallel zur Konstruktion von $A_e[n]$ wird die Menge $W_e[n]$ konstruiert. Anfangs gilt: $W_e[1] = A_e[1]$.

Für n > 1 wird parallel zu $A_e[n]$ die Menge $W_e[n]$ nach folgendem Filteralgorithmus konstruiert:

Falls $W_e[n] \cup \{f_e(n)\}$ präfixfrei : $W_e[n+1] := W_e[n] \cup \{f_e(n)\}$
sonst: : $W_e[n+1] := W_e[n]$.

$$W_e := \bigcup_n W_e[n]$$

Es gilt: W_e ist präfixfrei und $W_e \subseteq A_e$.

Damit konstruiert man eine Standardnumerierung ψ': N **à** $\{ \Sigma^*$ **à** $\Sigma^* \mid$ f ist berechenbar und selbstbegrenzend$\}$. Auf die Definitionsmenge jeder berechenbaren Funktion ψ_e wird der Filteralgorithmus angewendet, so daß eine berechenbare Funktion ψ'_e entsteht mit einer präfixfreien Definitionsmenge.
Es gilt: Falls $\psi'_e(w)$ terminiert, gilt: $\psi'_e(w) = \psi_e(w)$.

Betrachtet wird eine beliebige berechenbare selbstbegrenzende Funktion g. Aus der Berechenbarkeit von g folgt:
Es gibt eine natürliche Zahl $e \in N$ mit der Eigenschaft: $g(w) = \psi'_e(w)$.

Definiert wird folgende Funktion f:

$f(0^e1w) := \psi'_e(w)$.

Die Funktion f arbeitet in 2 Phasen.
In der ersten Phase zählt sie die Nullen bis eine 1 erreicht ist. In der zweiten Phase berechnet sie mit der jetzt bekannten Funktion $\psi'_e = g$ den Funktionswert g(w).
Die Konstante c_g beträgt in diesem Fall e + 1 und es gilt:

$K_f(w) \leq K_g(w) + c_g$

Die Funktion f ist universell selbstbegrenzend.

4. Semiberechenbare Semimaße

4.1. Zweck der Definition

Semiberechenbare Semimaße sind rekursiv aufzählbare Mengen $\subseteq N \times \Sigma^*$. Semiberechenbare Semimaße erlauben die alternative Beschreibung der Kolmogorovkomplexität. Sie benutzen dabei aber nicht eine spezielle Funktion f sondern eine Menge natürlicher Zahlen, das erste Tupel von $A \subseteq N \times \Sigma^*$.
Die folgenden zwei Sätze sind hilfreich für die Konstruktion von semiberechenbaren Semimaßen.

4.2. Die Präfixungleichung und der Satz von Kraft Chaitin

4.2.1. Die Präfixungleichung

Für den Beweis der Präfixungleichung benutzt man die Maßfunktion $\mu: \Sigma^\omega \to R$. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist die Maßfunktion μ wie folgt definiert:
$\mu(w\Sigma^\omega) = 2^{-|w|}$

Für eine präfixfreie Teilmenge $A \subseteq \Sigma^*$ ist die Maßfunktion μ wie folgt definiert:
$\mu(A\Sigma^\omega) = \text{Sum}_{w \in A}\, \mu(w) = \text{Sum}_{w \in A}\, 2^{-|w|}$

Offensichtlich gilt $\mu(\Sigma^\omega) = 1$. Man wählt A = {0,1} und erhält $\mu(\Sigma^\omega) = ½ + ½$.

<u>Satz 4.2.1.:</u>
Für jede präfixfreie Menge $A \subseteq \Sigma^*$ gilt:

$$\text{Sum}_{w \in A}\; 2^{-|w|} \leq 1$$

Beweis:
Es gilt: $\mu(A\Sigma^\omega) = \text{Sum}_{w \in A}\, 2^{-|w|}$

Falls gilt $(\bigcup_{w \in A} w\Sigma^\omega) = \Sigma^\omega$, dann gilt: $\mu(A\Sigma^\omega) = 1$.

Falls gilt $(\bigcup_{w \in A} w\Sigma^\omega)$ eine echte Teilmenge von Σ^ω ist, dann gilt: $\mu(A\Sigma^\omega) < \mu(\Sigma^\omega)$.

Also gilt: $\mu(A\Sigma^\omega) \leq \mu(\Sigma^\omega) = 1$.

4.2.2. Der Satz von Kraft Chaitin

<u>Satz 4.2.2.:</u>
Zu jeder berechenbaren Folge von natürlichen Zahlen $(m_i)_i$ mit der Eigenschaft:
$\text{Sum}_{i=0}^{\infty} \; (2^{-m_i}) \leq 1$

gibt es eine berechenbare Folge von Zeichenketten $(v_i)_i$ mit folgenden Eigenschaften:
1. Für alle v_i, v_j mit $i,j \in N$ gilt: v_i ist kein Präfix von v_j
2. Für alle $i \in N$ gilt: $| v_i | = m_i$.

Zur Veranschaulichung des Satzes dient der folgende Baum. Der Baum stellt Wörter aus Σ^* dar. Das Wort der Länge n ist der Pfad von der Wurzel bis zu einem Knoten der Tiefe n. Ist das j-te Zeichen des Wortes eine 0, geht man an der Verzweigung der Tiefe j nach links, andernfalls nach rechts. Folgt man dem Pfad eines Wortes w, dann übergeht man alle Präfixe des Wortes.
In diesen Baum werden nacheinander Wörter v_i der Länge m_i derart eingefügt, daß kein Wort das Präfix eines anderen ist. Vor dem Einfügen des Wortes v_i wird eine endliche Menge J_i natürlicher Zahlen berechnet. Die Elemente der Menge J_i geben an, welche Intervalle im Baum noch "frei" sind für Wörter. Mit der Menge J_i sorgt man

dafür, daß neue Wörter möglichst platzsparend eingefügt werden.
Anfangs gilt: $J_0 = \{0\}$. Im Baum sind noch alle Wörter belegbar. Nach dem Einfügen eines Wortes v_i der Länge n wird J_{i+1} berechnet, so daß folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\mathrm{Sum}_{n \in J_{i+1}} 2^{-n} = \mathrm{Sum}_{n \in J_i} 2^{-n} - 2^{-|v_i|}$$

Die Elemente von J_{i+1} sind eindeutig bestimmt.

Veranschaulichung mit dem Baum anhand eines Beispiels mit $m_0 = 3$, $m_1 = 4$, $m_2=4$. Gesucht ist zuerst ein Wort v0 der Länge 3. Im noch freien Baum wird v0 = 000 bestimmt. Dann werden alle Präfixe (0,00) und alle Wörter ‚unterhalb' von 000 gesperrt. Diese stehen jetzt nicht mehr zur Verfügung. J_1 wird berechnet:

$$\mathrm{Sum}_{n \in J1} 2^{-n} = \mathrm{Sum}_{n \in J0} 2^{-n} - 2^{-|v0|} = 1 - 1/8 = 7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$$

$J_1 = \{1, 2, 3\}$. Das bedeutet: Nach dem Einfügen von v_0 =000 ist maximal Platz für je eine Zeichenkette der Länge 1,2 und 3.

Im Baum wird jetzt ein Wort der Länge 4 eingefügt: Das Wort 0000 ist gesperrt, deshalb wird v_1= 0010 gewählt.

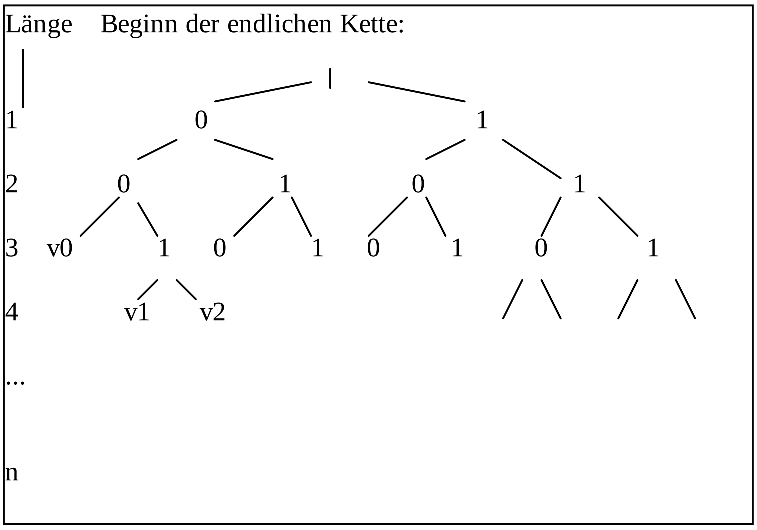
$$\mathrm{Sum}_{n \in J2} 2^{-n} = \mathrm{Sum}_{n \in J1} 2^{-n} - 2^{-|v1|} = 7/8 - 1/16 = 13/16 = 1/2 + 1/4 + 1/16 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4}$$

$J_2 = \{1, 2, 4\}$. Es ist maximal Platz für je eine Zeichenkette der Länge 1, 2 und 4.

Es folgt v_2 = 0011.

$$\mathrm{Sum}_{n \in J3} 2^{-n} = \mathrm{Sum}_{n \in J2} 2^{-n} - 2^{-|v2|} = 13/16 - 1/16 = 3/4 = 1/2 + 1/4 = 2^{-1} + 2^{-2}$$

$J_3 = \{1,2\}$



Damit ist gezeigt, daß sich aus einer Folge natürlicher Zahlen eine präfixfreie Menge generieren läßt. Dieser Satz ist bei der Benutzung von semiberechenbaren Semimaßen wichtig.

4.3. Die Definition der semiberechenbaren Semimaße

Definition

Ein semiberechenbares Semimaß ist eine rekursiv aufzählbare Menge $A \subseteq N \times \Sigma^*$ mit der Eigenschaft:

$$\mathrm{Sum}_{(n,w) \in A}\ 2^{-n} \leq 1$$

Für eine semiberechenbares Semimaß heißt

$K_A(w) :=$ { min {n | (n,w) $\in$ A } falls $\exists$ m mit (m,w) $\in$ A

{ ∞ sonst

die Komplexität von w bezüglich A

Ein semiberechenbares Semimaß $U \subseteq N \times \Sigma^*$ heißt universelles Semimaß, wenn es für jedes semiberechenbare Semimaß $A \subseteq N \times \Sigma^*$ eine Konstante c_A gibt, so daß für jedes $w \in \Sigma^*$ gilt:

$K_U(w) \leq K_A(w) + c_A$

Mit den semiberechenbaren Semimaßen ist eine Möglichkeit gefunden, die Kolmogorovkomplexität von Zeichenketten zu bestimmen, ohne auf die selbstbegrenzende Funktion selbst zurückgreifen zu müssen.

4.4. Eigenschaften der semiberechenbaren Semimaße

Die folgenden vier Eigenschaften zeigen die Äquivalenz von semiberechenbaren Semimaßen und selbstbegrenzenden berechenbaren Funktionen:

1.
Zu jeder selbstbegrenzenden berechenbaren Funktion $f \subseteq \Sigma^*$ **à** Σ^* ist die Menge $A_f \subseteq N \times \Sigma^*$ mit Af := { (|v|, f(v) | v $\in$ Def(f) } ein semiberechenbares Semimaß und es gilt:
K_{Af} (w) = $K_f(w)$ für jedes $w \in \Sigma^*$

2.
Ist die Funktion $f \subseteq \Sigma^*$ **à** Σ^* eine universelle selbstbegrenzende Funktion, dann ist
Af := { (|v|, f(v)) | v $\in$ Def(f) } ein universelles Semimaß.

3.
Zu jedem semiberechenbaren Semimaß $A \subseteq N \times \Sigma^*$ gibt es eine selbstbegrenzende berechenbare Funktion $f \subseteq \Sigma^*$ **à** Σ^* mit der Eigenschaft: $K_f(w) = K_A(w)$ für jedes $w \in \Sigma^*$

4.
Sei $U \subseteq N \times \Sigma^*$ ein universelles Semimaß, dann ist jede selbstbegrenzende berechenbare Funktion f Σ^* **à** Σ^* mit der Eigenschaft $K_f(w) = K_U(w)$ für jedes $w \in \Sigma^*$, eine universell selbstbegrenzende Funktion.

Beweis der Eigenschaften 1 bis 4.

1.
Die Definitionsmenge der Funktion f ist präfixfrei. Mit Satz 4.2.1 folgt, daß für die Menge natürlicher Zahlen A_f' = { | v | | v $\in$ Def(f) } gilt: $\mathrm{Sum}_{n \in A_f'}\ 2^{-n} \leq 1$

Aus A_f' läßt sich leicht das semiberechenbare Semimaß A_f = (|v|,f(v) | v $\in$ Def(f) } konstruieren.

2.
Zur universell selbstbegrenzenden Funktion f gibt es für jede selbstbegrenzende Funktion g eine Konstante c_g, so daß für alle w gilt: $K_f(w) \leq K_g(w) + c_g$.

Ähnlich wie in Satz 1 konstruiert man ein semiberechenbares Semimaß A_f mit der Eigenschaft: $K_{Af}(w) = K_f(w) \leq K_g(w) + c_g$ für jedes $w \in \Sigma^*$.

Sei G ein beliebiges semiberechenbare Semimaß. Dann läßt sich nach Satz 3 daraus eine selbstbegrenzende berechenbare Funktion g konstruieren mit der Eigenschaft: $K_g(w) = K_G(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Aus $K_{Af}(w) = K_f(w) \leq K_g(w) + c_g$ und $K_g(w) = K_G(w)$ folgt für die semiberechenbaren Semimaße G und A_f:

Es gibt eine Konstante c_g mit der Eigenschaft: $K_{Af}(w) \leq K_G(w) + c_g$.

A_f ist ein universelles Semimaß.

3.
Für das semiberechenbare Semimaß A gilt die Summeneigenschaft: $\mathrm{Sum}_{(n,w) \in A}\ 2^{-n} \leq 1$

Die Menge A = {(m0,w0),(m1,w1),...} ist per Definition rekursiv aufzählbar. Mit dem Satz von Kraft Chaitin (4.2.2.) läßt sich aus der Menge natürlicher Zahlen {m0,m1,m2 ... } , die diese Summeneigenschaft erfüllt, eine präfixfreie rekursiv aufzählbare Menge von Wörtern (Beschreibungen) {v0,v1,v2 ...} und die rekursiv aufzählbare Menge {(v0,w0),(v1,w1),(v2,w2),..} $\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ konstruieren. Für alle $i \in N$ gilt: | vi | = mi.
Die Funktion f_A mit der Eigenschaft $f_A(vi) = wi \ \ \forall i \in N$ ist berechenbar.

Zu unterscheiden sind 2 Fälle:
1. Fall
Für das Wort $w \in \Sigma^*$ gibt es ein kleinstes n_{min} mit $(n_{min},w) \in A$. Dann gilt $K_A(w) = n_{min}$.
Mit obigem Algorithmus wird zu n_{min} ein kürzestes Wort v der Länge n_{min} konstruiert. Es gilt: $f_A(v) = w$. Das Wort v ist das kürzeste Wort mit der Eigenschaft $f_A(v) = w$.

Damit gilt: $K_{fA}(w) = |v| = n_{min}$

2. Fall
Für das Wort $w \in \Sigma^*$ gibt es keine Zahl n mit $(n,w) \in A$. Dann konstruiert obiger Algorithmus kein Wort v mit f(v) = w und es gilt:
$K_A(w) = \infty$, $K_{fA}(w) = \infty$.

In beiden Fällen gilt: $K_A(w) = K_{fA}(w)$.

4.
Sei U ein universelles Semimaß. Dann gibt es für jedes semiberechenbare Semimaß A eine Konstante c_A mit der Eigenschaft: $K_U(w) \leq K_A(w) + c_A$ für alle $w \in \Sigma^*$. (1)
Mit Satz 3 wird zum semiberechenbaren Semimaß U die selbstbegrenzende berechenbare Funktion $f_U \in \{ \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \}$ mit der Eigenschaft: $K_{fU}(w) = K_U(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ konstruiert. (2)
Mit Satz 1 konstruiert man zu einer beliebigen selbstbegrenzenden berechenbaren Funktion g ein semiberechenbares Semimaß A mit der Eigenschaft $K_g(w) = K_A(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$. (3)

Aus (1) und (2) folgt: $K_{fU}(w) = K_U(w) \leq K_A(w) + c_A$ für alle $w \in \Sigma^*$.
Aus (3) folgt: $K_A(w) = K_g(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Es gilt für alle selbstbegrenzenden berechenbaren Funktionen g gibt es eine Konstante c_G mit

$K_{fU}(w) \leq K_g(w) + c_G$. Die Funktion f_U ist universell selbstbegrenzend.

Diese vier Sätze zeigen die Äquivalenz von semiberechenbaren Semimaßen und selbstbegrenzenden berechenbaren Funktionen bzw. universellen Semimaßen und universellen selbstbegrenzenden Funktionen.

5. Die Kolmogorovkomplexität und unendliche Zeichenketten

Bisher wurde nur die Kolmogorovkomplexität von endlichen Zeichenketten definiert. Folgen sind unendliche Zeichenketten. Deshalb ist eine Definition notwendig.

5.1. Definition

Sei p eine Folge $\in \Sigma^N$ und f eine universelle selbstbegrenzende Funktion $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
Die Funktion, die jedem Präfix p^ n der Folge die Kolmogorovkomplexität K_f(p ^ n) zuordnet, heißt Kolmogorovkomplexität der Folge p bezüglich der Funktion f.

Gibt es eine Konstante c $\in$ N und gilt für jedes n $\in$ N: K_f(p ^ n) $\leq$ K_f(w) + c für jedes w $\in \Sigma^n$, dann bezeichnet man p als Folge mit niedriger Kolmogorovkomplexität.

5.2. Berechenbare Folgen

<u>Satz 5.2:</u>
Berechenbare Folgen haben eine niedrige Kolmogorovkomplexität.

Der folgende Beweis des Satzes arbeitet mit semiberechenbaren Semimaßen statt mit selbstbegrenzenden Funktionen.

Beweis:
Sei U $\subseteq$ N $\times$ Σ^* ein universelles Semimaß und p eine berechenbare Folge. Konstruiert wird abhängig von der Folge in Stufen (n) ein semiberechenbares Semimaß A. A ist anfangs leer.

Da die Folge p berechenbar ist, kann man jedes Präfix der Folge hinschreiben.
Für jedes Element (k,w) $\in$ U wird ein entsprechendes Element (k,p^ |w|) zur Menge A hinzugefügt.
Damit gilt: K_A (p^n) $\leq$ min { K_U | w $\in$ Σ^* und |w| = n } (1)
Es gilt auch K_U(p^n) $\leq$ K_A (p^n) + c_A (2)

Aus (1) und (2) folgt: K_U(p^n) $\leq$ min { K_U(w) | w $\in$ Σ^* und |w| = n } + c_A.

Man beachte, daß die Konstante c_A vom semiberechenbaren Semimaß A und damit von der Folge p abhängt.

<u>Berechenbare Folgen haben eine niedrige Kolmogorovkomplexität.</u>

5.3. Eine nichtberechenbare Folge

Dieses Kapitel enthält den Beweis des folgenden Satzes:

<u>Satz 5.3.:</u>
"Es gibt eine rekursiv-aufzählbare, aber nicht rekursive Menge natürlicher Zahlen derart, daß die charakteristische Folge dieser Menge bis auf eine additive Konstante die gleiche Kolmogorovkomplexität wie die Folge 0^ω hat."

5.3.1.Prinzip des Beweises

Der Beweis der niedrigen Kolmogorovkomplexität für eine rekursiv aufzählbare, aber nichtberechenbare Folge unterscheidet sich von dem für eine berechenbare Folge.
Eine nichtberechenbare Folge kann man nicht hinschreiben. Deshalb wird eine rekursiv aufzählbare, nicht rekursive Menge A in Stufen konstruiert und für deren charakteristische Folge X_A die Kolmogorovkomplexität bestimmt.
Die Menge A wird in Stufen n konstruiert, parallel dazu ein semiberechenbares Semimaß B, das sich aus zwei Teilmengen B1 $\cup$ B2 zusammensetzt.

5.3.2. Definitionen

Für die Beweisführung werden folgende Definitionen benutzt:

W_e $\subseteq N$:= Def(φ_e) Definitionsbereich der Funktion $\varphi_e \in P(1)$
U $\subseteq N \times \Sigma^*$ ein universelles Semimaß.
A $\subseteq N$ die zu konstruierende rekursiv aufzählbare, nicht rekursive Menge.
B,B1,B2 $\subseteq N \times \Sigma^*$, B = B1 $\cup$ B2 ist das zu konstruierende semiberechenbare Semimaß.

Da U eine nichtleere rekursiv aufzählbare Menge ist, gibt es eine total rekursive Funktion g: N à $N \times \Sigma^*$ mit U = { g(0), g(1) ,... }. Die Funktion g zählt die Menge U rekursiv auf.
U[n] := { g(0), g(1) ,... g(n-1) }.

Da Def(uφ) eine nichtleere rekursiv aufzählbare Menge ist, gibt es eine total rekursive Funktion h $\in$ {N à $N \times N$ } , die den Definitionsbereich der universellen Turingmaschine (utm) rekursiv aufzählt.
Def(uφ) = { h(0),h(1), ... } . Die Funktion h zählt die Def(uφ) rekursiv auf.

W_e [n] = { k $\in$ N | (e,k) $\in$ {h(0), h(1), ... h(n-1) }.
Für alle Zahlen k $\in$ W_e [n] gilt: uφ(e,k) existiert und uφ(e,k) = φ_e(k).

W_e[n], U[n], A[n], B1[n], B2[n] bezeichnen jeweils endliche Teilmengen der rekursiv aufzählbaren Mengen W_e, U, A, B1, B2. Der Index n ist die Stufe und gibt an, daß W_e[n], U[n], A[n], B1[n], B2[n] jeweils die Elemente enthalten, die bis zur Stufe n in die Mengen aufgezählt wurden. Sie enthalten jeweils höchstens n Elemente und sind uniform rekursiv.
Der Algorithmus prüft bei jeder Stufe n die Mengen A[n], U[n], W_e[n], die sich möglicherweise von den Mengen A[n-1], U[n-1], W_e[n-1] unterscheiden, auf Enthaltensein.
Die Entscheidung, ob ein Paar (k,w) $\in N \times \Sigma^*$ U[n] oder eine natürliche Zahl k in A[n] oder W_e[n] enthalten sind, hängt von n ab, im Fall W_e[n] von n und e.
Die Entscheidung muß abhängig von n, bzw. e und n getroffen werden können.
Die Mengen
{ (k,w,n) $\in N \times \Sigma^* \times N$ | (k,w) $\in$ U[n] },
{ (k,n) $\in N \times N$ | k $\in$ A[n] },
{ (k,e,n) $\in N \times N \times N$ | k $\in$ W_e[n] },
{ (k,w,n) $\in N \times \Sigma^* \times N$ | (k,w) $\in$ B1[n] },
{ (k,w,n) $\in N \times \Sigma^* \times N$ | (k,w) $\in$ B2[n] }
sind rekursiv.

Beweis für { (k,e,n) $\in N \times N \times N$ | k $\in$ W_e[n] }:
Mit der Funktion h läßt man sich {h(0], ... h(n-1) } $\in N \times N$ aufzählen. Diese endliche Menge untersucht man auf das Paar (e,k). Damit ist eine berechenbare charakteristische Funktion gefunden.

5.3.3. Beweis

Verwendet wird folgender Algorithmus:

Zu Beginn gilt n = 0 und A[0] = {}, B1[0] = {}, B2[0] := {}.

Für jedes n > 0 wird eine Zahl e $\leq$ n gesucht, die folgende 3 Bedingungen erfüllt:
1. $W_e[n] \cap A[n-1] = \{\}$
2. $\exists\, k \in N$: $\langle e,k\rangle \in W_e[n]$
3. $\mathrm{Sum}_i\ 2\char`^(-K_U[n](0^i)) \leq ½ *(2^{-e})$ Die Summierung geht über alle i mit der Eigenschaft: $i \geq \langle e,k\rangle \wedge K_U[n](0^i) < \infty$

Erklärung zu den 3 Kriterien:
Gesucht wird ein neues Element für die Menge A[n]. Für jede berechenbare Funktion φ_e soll A höchstens ein Element <e,k> enthalten, falls ein solches existiert (1. und 2.

Bedingung). Sobald A ein Element <e,k1> enthält, wird kein zweites Element <e,k2> mit k2 > k1 dazugefügt.
Die Bedingung 3 dient dazu, die Komplexität der Teilketten der berechenbaren Folge 0^ω bezüglich der Menge U[n] nach oben abzuschätzen. Diese Bedingung ist für die Konstruktion der Menge B2 notwendig. Der Faktor ½ ist notwendig, weil 2 Mengen B1 und B2 konstruiert werden. In der Menge B1 wird auch ein Faktor ½ eingefügt.
B2 und A werden erweitert, genau dann, wenn ein Paar <e,k> gefunden wurde. Wird in Stufe n kein passendes Paar <e,k> gefunden, dann gilt: A[n] := A[n–1].
B1 kann in beiden Fällen erweitert werden.

<u>Erweiterung von B2 und A</u>
Falls eine Zahl e mit einer passenden Zahl k gefunden wurde, gibt es ein kleinstes k_e, das die Bedingung 2 erfüllt. Es werden zusätzlich folgende Schritte auf den Mengen B2 und A ausgeführt:

$$B2[n] := B2[n-1] \cup \{ (K_{U[n]}(0^i), \chi_{A[n]} \wedge i \mid i \geq <e,k> \wedge K_{U[n]}(0^i) < \infty \}$$
$$A\ [n] := A[n-1] \cup \{ <e,k_e> \}$$

B2 wird erweitert um Präfixe der charakteristischen Folge χ_A der Länge i, wobei die Zeichenkette 0^i die Bedingung 3 erfüllen muß. Jedes Paar $(x, \chi_{A[n]} \wedge i)$, das der Menge B2[n] dazugefügt wird, hat ein entsprechendes Element $(x,0^i)$ aus U[n] mit derselben natürlichen Zahl x und einer Zeichenkette der gleichen Länge i.

<u>Erweiterung von B1</u>
Unabhängig davon, ob eine Zahl e mit einer passenden Zahl k gefunden wurde, die obige 3 Bedingungen erfüllen, wird folgender Schritt auf der Menge B1 ausgeführt.

$$B1[n] := B1[n-1] \cup \{(len + 1, \chi_{A[n]} \wedge i) \mid (len, 0^i) \in U[n] \setminus U[n-1] \}.$$

Falls $(len, 0^i)$ mit dem (n+1) ten Element von U übereinstimmt, wird B1 erweitert um das Paar $(len + 1, \chi_A \wedge i)$.

Die unendlichen Mengen A und B erhält man:
$$A := \bigcup_{n \in N} A[n], \quad B := \bigcup_{n \in N} (B1[n] \cup B2[n]).$$

Die Mengen A und B werden durch obigen Algorithmus rekursiv aufgezählt.

<u>Satz 5.3.3.a:</u>
Die Komplementmenge N \ A ist nicht rekursiv aufzählbar.

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: N \ A ist rekursiv aufzählbar.
Dann gibt es eine partiell berechenbare Funktion $\varphi_e \in P(1)$ mit $N \setminus A = Def(\varphi_e)$. Betrachtet wird eine natürliche Zahl <e,k> mit einer beliebigen natürlichen Zahl k. Diese Zahl wird der Menge A[n] in einer Stufe n zugefügt, wenn sie die 3 Bedingungen erfüllt, also auch $<e,k> \in W_e$. Nach der Annahme gilt aber $W_e = N / A$.
Deshalb gilt: $<e,k> \in N \setminus A$.

Die Summe
$$2^{-Ku(\varepsilon)} + 2^{-Ku(0)} + 2^{-Ku(00)} + 2^{-Ku(000)} + \ldots \leq 1$$

ist nach oben begrenzt, weil U ein universelles Semimaß ist. Von dieser Summe entfernt man die ersten endlich vielen Summanden, um die obere Grenze zu verkleinern. Gesucht ist ein k, das die folgende Bedingung erfüllt:

$$i > <e,k>:\ 2^{-Ku(0^i)} + 2^{-Ku(0^{i+1})} + 2^{-Ku(0^{i+2})} + \ldots \leq ½ * 2^{-e}. \qquad (3^*)$$

Ist ein genügend großes k gefunden, dann erfüllt <e,k> beim Konstruieren der Mengen A[n], B1[n] und B2[n] die Bedingungen 1 und 3:

Die Bedingung 1 deshalb, weil laut Annahme $W_e \cap A = \{ \}$.
Die Bedingung 3 deshalb, weil k genau so gewählt wurde, daß es obige Bedingung (3*) erfüllt, die strenger ist als Bedingung 3.

Betrachtet wird nun Bedingung 2. Aus $<e,k> \in W_e$ folgt, daß nach endlich vielen Stufen n, also für ein genügend großes n gilt: $<e,k> \in W_e[n]$. Für ein genügend großes n sind also die Bedingungen 1,2 und 3 erfüllt und die Zahl <e,k> wird ein Element von A[n] kann deshalb kein Element von N \ A sein.

Aus diesem Widerspruch folgt, daß N \ A nicht Definitionsmenge einer berechenbaren Funktion ist.

<u>Also gilt: N \ A ist nicht rekursiv aufzählbar. A ist nicht rekursiv.</u>

<u>Satz 5.3.3. b:</u>
Die Menge B ist ein semiberechenbares Semimaß.

Beweis:

$$\underset{(l,\,w)\,\in\,B}{\mathrm{Sum}} (2^{-l}) \leq \underset{(l,w)\,\in\,B1}{\mathrm{Sum}} (2^{-l}) + \underset{(l,w)\,\in\,B2}{\mathrm{Sum}} (2^{-l})$$

$$\underset{(l,\,w)\,\in\,B1}{\mathrm{Sum}} (2^{-l}) = \underset{(l,\,w)\,\in\,U}{\mathrm{Sum}} (2^{-(l+1)}) = ½ * \underset{(l,\,w)\,\in\,U}{\mathrm{Sum}} 2 (^{-l}) \leq ½$$

Die Konstruktion jedes Elements (x, $X_{A[n]}$ ^i) der Menge B1[n] mit der natürlichen Zahl x = (l+1) garantiert hier den Faktor ½.

$$\underset{(l,\,w)\,\in\,B2}{\mathrm{Sum}} (2^{-l}) \leq \underset{e\,\in\,N}{\mathrm{Sum}} ½ * (2^{-e}) \leq ½$$

Diese Ungleichung ist durch Bedingung 3 garantiert.

Es gilt: $\underset{(l,\,w)\,\in\,B1}{\mathrm{Sum}} (2^{-l}) \leq ½ + ½ = 1.$

<u>Also gilt: B ist ein semiberechenbares Semimaß.</u>

<u>Satz 5.3.3.c:</u>
Mit dem semiberechenbaren Semimaß B und dem universellen Semimaß U gilt für jedes $i \in N$:

$K_B(X_A$ ^i$) \leq K_U(0^i) + 1$

Beweis:
Betrachtet wird das Präfix X_A ^ i der nichtberechenbaren Folge X_A . Betrachtet werden außerdem 2 Stufen $n, m \in N$. Die Zahl n sei die größte Zahl mit folgender Eigenschaft:

<u>Stufe n:</u>
Bei Stufe n wird die Menge A um ein Element <e,k> < i erweitert, also $<e,k> \in A[n] \setminus A[n-1]$. Die Zahl n ist die letzte Stufe, bei der A um eine Zahl <e,k> < i erweitert wird. Falls A überhaupt keine Zahlen < i enthält, wird n per Definition gleich 0 gesetzt.

In beiden Fällen ($n=0$, $n \neq 0$) gilt: $X_A[n]$ ^ i = X_A ^ i .

<u>Stufe m:</u>
U ist ein universelles Semimaß, deshalb gilt $K_U(0^i) < \infty$ und es gibt ein $k > 0$ mit $K_U(0^i) = k$. Falls es mehrere Paare $(k1, 0^i)$, $(k2, 0^i)$ ... $\in U$ gibt, gilt $k = \min \{ k \mid (k, 0^i) \in U \}$.
Aus $K_U(0^i) = k$ folgt die Existenz einer Zahl $m \in N$ mit der Eigenschaft:
$(k, 0^i) \in U[m] \setminus U[m-1] = g(m-1)$.

Abhängig von n und m sind 2 Fälle zu unterscheiden:

$m \geq n$
In Stufe m greift die Bedingung zur Erweiterung von B1[m]. $(k, 0^i) \in U[m] \setminus U[m-1] = g(m-1)$. B1[m] wird erweitert um $(k+1, X_{A[n]} \wedge i) = (k+1, X_A \wedge i)$.

$m < n$
In Stufe m wird B1[m] erweitert um ein Element $(k+1, X_{A[m]} \wedge i)$. Aber in diesem Fall $(m < n)$ ist $X_{A[m]} \wedge i$ nicht identisch mit $X_A \wedge i$.
Danach wird in Stufe n B2[n] erweitert. In dieser Stufe ist die Kolmogorovkomplexität $K_U(0^i)$ aus Stufe m bereits bekannt. B2[n] wird erweitert um $(k, X_A \wedge i)$.

In beiden Fällen gilt, wegen $B = B1 \cup B2$: $K_B(X_A \wedge i) \leq k + 1$.

<u>Die charakteristische Folge der rekursiv aufzählbaren, aber nicht rekursiven Menge A $\subset$ N, hat eine niedrige Kolmogorovkomplexität</u>.

6. Kolmogorovkomplexität und reelle Analysis

Bisher fehlte der Bezug zur reellen Analysis. Der soll hier kurz dargestellt werden. Zeichenfolgen werden verwendet, um reelle Zahlen darzustellen. Hier wird nicht die Cauchydarstellung sondern die Binärdarstellung verwendet. Ein Kriterium für reelle Zahlen ist, wie genau man sie durch berechenbare Folgen rationaler Zahlen approximieren kann. In diesem Zusammenhang ist die Dominanzrelation definiert.

6.1. Die Dominanzrelation

Seien $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ zwei monoton steigende Folgen rationaler Zahlen mit den reellen Grenzwerten a und b. Die Grenzwerte a und b werden durch kleinere Zahlen von links approximiert, ohne daß die Konvergenzgeschwindigkeit bekannt ist.

1. $(a_i)_i$ dominiert über $(b_i)_i$, wenn es eine Konstante $c \in N$ gibt, so daß für alle $i \in N$ gilt:
   $c * (a - a_i) \geq (b - b_i)$
2. Seien jetzt a und b zwei linksberechenbare Zahlen. a dominiert über b, wenn es zwei monoton steigende berechenbare Folgen rationaler Zahlen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ mit den Grenzwerten a und b gibt, so daß $(a_i)_i$ über $(b_i)_i$, dominiert.

Die Dominanzrelation (a dominiert b) gibt an, ob sich aus einer monoton steigenden Folge rationaler Zahlen, die gegen den Grenzwert a konvergiert, eine andere monoton steigende Folge rationaler Zahlen, die von unten gegen den Grenzwert b konvergiert – bis auf einen konstanten Faktor - berechnen läßt.
Die Dominanzrelation ist reflexiv und transitiv.

6.2. Die Äquivalenzrelation

Mit Hilfe der Dominanzrelation der rationalen Folgen läßt sich eine Äquivalenzrelation über rationalen Folgen und entsprechend über reelle Zahlen definieren, die gegenseitige Dominanz:

Zwei reelle Zahlen a und b heißen äquivalent, wenn a über b dominiert und b über a dominiert.

Die gegenseitige Dominanz ist reflexiv, transitiv und symmetrisch und deshalb eine Äquivalenzrelation.

6.3. Die Äquivalenzklassen

Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation sind jeweils alle linksberechenbaren Zahlen, die äquivalent sind.

Die berechenbaren reellen Zahlen sind durch berechenbare monoton steigende rationale Folgen beliebig genau zu approximieren. Jede berechenbare Zahl dominiert über jede andere berechenbare Zahl. Diese Folgen liegen deshalb in einer Äquivalenzklasse. Andere Folgen liegen nicht in dieser Äquivalenzklasse. Diese Äquivalenzklasse heißt kleinste Äquivalenzklasse, weil es keine reellen Zahlen außerhalb dieser Klasse gibt, über die Zahlen in dieser Äquivalenzklasse dominieren.

6.4. Kolmogorovkomplexität und Dominanz

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kolmogorovkomplexität und der Dominanz von Folgen? Sowohl die Kolmogorovkomplexität als auch die Dominanz sagen etwas aus über die Qualität von Folgen bzw. die reellen Zahlen, die durch diese Folgen dargestellt werden.

Seien p und q $\in \Sigma^N$ zwei Binärfolgen und die Binärnamen der zwei linksberechenbaren Zahlen 0.p und 0.q .

Falls 0.p über 0.q dominiert, dann gilt für die Kolmogorovkomplexität der beiden Folgen mit dem universellen Semimaß U: Es gibt eine natürliche Zahl c mit der Eigenschaft:

$K_u(q\hat{}n) \leq K_u(p\ \hat{}n) + c$.

Mit der reellen Zahl p läßt sich – bis auf eine Konstante – die Zahl q mindestens genauso gut approximieren. Die Folge der mindestens genauso approximierbaren Zahl q hat verglichen mit p die – bis auf eine Konstante – mindestens genauso gute oder bessere Kolmogorovkomplexität. Auf den relativ aufwendigen Beweis aus Dokument [2] wird hier verzichtet.

Betrachtet wird nun die ”beste” Klasse der Äquivalenzrelation:

In der kleinsten Äquivalenzklasse liegen genau die berechenbaren reellen Zahlen. Und die charakteristischen Folgen der berechenbaren Zahlen haben eine niedrige Kolmogorovkomplexität (Kapitel 5.2.).
In Kapitel 5.3.3. ist gezeigt, daß es auch eine nichtberechenbare Zahl gibt, deren charakteristische Folge eine niedrige Kolmogorovkomplexität hat.

Ist X_A die charakteristische Folge der rekursiv aufzählbaren, aber nicht rekursiven Menge A, dann ist X_A der Name einer linksberechenbaren, aber nicht berechenbaren Zahl aus dem Intervall [0;1].

Die Menge der Folgen, die eine niedrige Kolmogorovkomplexität haben ist eine echte Obermenge der Folgen, die in der kleinsten Äquivalenzklasse, der Menge der berechenbaren Folgen, liegen.

7. Quellenangaben

Quellenangaben
[1] Peter Hertling "A Non-Computable Number With Low Kolmogorov Complexity", Fernuniversität Hagen, 2002
[2] Christian Calude, Peter Hertling, Bakhadyr Khoussainov, Yongge Wang "Recursively Enumerable Reals And Chaitin Ω Numbers", Department of computer science, University of Auckland, 1999
[3] George Markowsky "An Introduction To Algorithmic Information Theory" Computer Science Department, University Of Maine, 1996
[4] Gregory Chaitin "A Theory Of Program Size Formally Identical To Information Theory" Association For Computing Machinery, 1975
[5] Rodney Downey: "Some Computability-Theoretical Aspects Of Reals And Randomness"
[6] Vasco Brattka, Peter Hertling, Klaus Weihrauch "Einführung In Die Berechenbare Analysis", Fernuniversität Hagen, 1999
[7] Klaus Weihrauch "Einführung In Die Theoretische Informatik A", Fernuniversität Hagen, 1997
[8] Nikolai Vereshchagin "A Computably Enumerable Undecidable Set With Low Prefix Complexity: A Simplified Proof", Lomonossow University Moskau, 2001