



**FernUniversität**  
Gesamthochschule in Hagen

FACHBEREICH MATHEMATIK  
LEHRGEBIET KOMPLEXE ANALYSIS

Prof. Dr. Andrei Duma

Proseminar 1092 - Analysis  
**Numerische Integration**

Ulrich Telle  
Matrikel-Nr. 1471341

Köln, den 7. Dezember 2002

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Quadraturformeln</b>	<b>3</b>
2.1	Rechteckregel . . . . .	3
2.2	Trapezregel . . . . .	5
2.3	Simpsonregel . . . . .	7
2.4	$\frac{3}{8}$ -Regel . . . . .	9
2.5	Newton-Cotes-Formeln . . . . .	10
2.6	Gauß-Formeln . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Praktische Aspekte der numerischen Integration</b>	<b>11</b>
3.1	Fehlerabschätzung . . . . .	11
3.2	Uneigentliche Integrale . . . . .	12
3.3	Integrale mit Singularitäten . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>13</b>

# 1 Einleitung

Das Integral einer stetigen Funktion kann als Fläche gedeutet werden. An der Bestimmung der Fläche unter der durch den Integranden bestimmten Funktion über einem Intervall  $[a, b]$  ist man in vielen praktischen Anwendungen interessiert. Falls die Stammfunktion  $F$  des Integranden  $f$  formelmäßig bestimmt werden kann, gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Die numerische Auswertung eines bestimmten Integrals  $\int_a^b f(x)dx$  kann allerdings häufig nur näherungsweise erfolgen, denn für viele Integrale lässt sich die Stammfunktion nur mit viel Aufwand oder sogar überhaupt nicht formelmäßig bestimmen. Ein Beispiel wäre etwa das Integral

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

In manchen Anwendungsfällen liegt der Integrand auch nur als durch Messungen gegebene empirische Funktion vor. In solchen Situationen helfen numerische Integrationsmethoden, die man auch als *Quadraturformeln* bezeichnet, weiter.

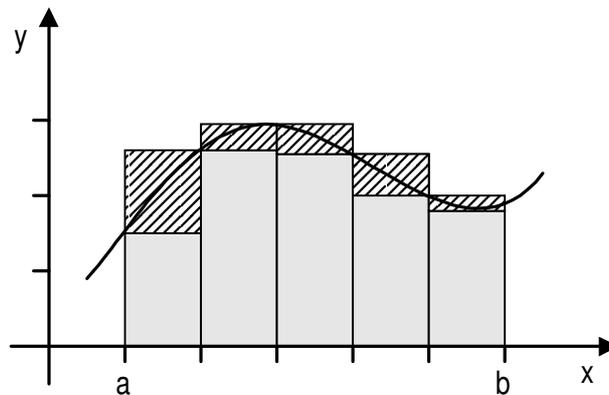


Abbildung 1: Riemannsches Integral

Eine erste Approximation des Integrals kann aus der Definition des *Riemannsches Integrals* abgeleitet werden. Für stetige Funktionen und eine Zerlegung  $Z$  des Integrationsintervalls  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle mit  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  sind die Riemannsche Unter- und Obersumme definiert als

$$U(f, Z) := \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \cdot \inf\{f(x); a_{i-1} \leq x \leq a_i\}$$

$$O(f, Z) := \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \cdot \sup\{f(x); a_{i-1} \leq x \leq a_i\}$$

und es gilt

$$U(f, Z) \leq \int_a^b f(x) dx \leq O(f, Z)$$

Für die praktische Anwendung ist diese Vorgehensweise jedoch ungeeignet, da insbesondere die Bestimmung des Infimums und des Supremums auf den Teilintervallen aufwendig ist. In der Praxis häufig erwünscht ist allerdings eine Eingrenzung des tatsächlichen Integralwertes bzw. eine Abschätzung des Fehlers, der bei der numerischen Berechnung auftritt.

## 2 Quadraturformeln

Aus der großen Vielfalt von Quadraturformeln sollen in den folgenden Abschnitten einige elementare Methoden vorgestellt werden.

### 2.1 Rechteckregel

Die Definition des Riemannsches Integrals legt die Idee nahe, die Fläche unter der durch die Funktion  $f(x)$  gegebenen Kurve auf einem Intervall  $[a, b]$  durch *Rechteckflächen* anzunähern. Man nennt diese einfache Approximation **Rechteckregel**. Die Breite der Rechteckfläche ist durch das Intervall bestimmt, für die Höhe gibt es zwei Möglichkeiten: der Funktionswert kann am linken oder auch am rechten Intervallende genommen werden.

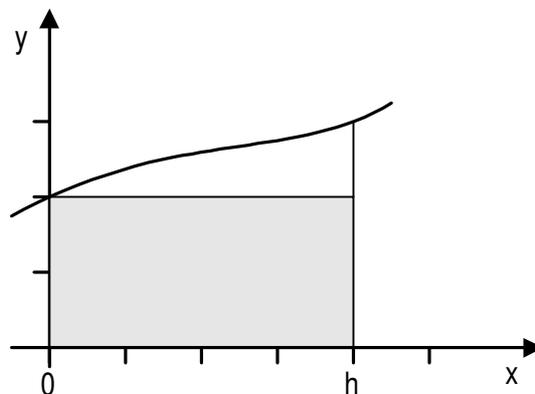


Abbildung 2: Rechteck-Regel

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im folgenden das Intervall auf  $[0, h]$  festgelegt und der Funktionswert am linken Intervallende verwendet. Daraus ergibt sich für das Integral die Näherungsformel :

$$\int_0^h f(x)dx \approx h \cdot f(0)$$

Es stellt sich nun natürlich die Frage, wie groß wohl der Fehler gegenüber dem exakten Integralwert ist. Der Fehler wird durch die Gleichung

$$R(h) = \int_0^h f(x)dx - h \cdot f(0)$$

bestimmt. Unter der Voraussetzung, dass die Funktion  $f$  einmal stetig differenzierbar ist, ergibt sich daraus durch zweimalige Differentiation:

$$\begin{aligned} R'(h) &= f(h) - f(0) \\ R''(h) &= f'(h) \end{aligned}$$

$R''$  kann betragsmäßig abgeschätzt werden:

$$|R''(h)| = |f'(h)| \leq M_1 \quad \text{wobei } M_1 = \sup_{t \in [0, h]} |f'(t)|$$

Integration ergibt die Fehlerabschätzung

$$|R(h)| \leq M_1 \cdot \frac{h^2}{2}$$

Indem das Intervall, über dem die Funktion integriert werden soll, in kleinere, gleich große Teilintervalle zerlegt wird und die Rechteckflächen über diesen Teilintervallen summiert werden, gelangt man zum **Rechteckverfahren**, dem einfachsten numerischen Integrationsverfahren. Da nach Voraussetzung die Funktion integrierbar ist, spielt es bei einer genügend feinen Zerlegung keine Rolle, ob der linke oder rechte Funktionswert für die Flächenberechnung benutzt wird. Im Falle der Existenz des Integrals, die ja vorausgesetzt wird, konvergieren beide Summen gegen den gleichen Grenzwert.

Als Näherung für das Integral einer Funktion  $f$  über ein Intervall  $[a, b]$  erhält man bei einer Zerlegung in  $n$  Teilintervalle der Länge  $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot h)$$

Entsprechend der obigen Fehlerabschätzung beträgt der Gesamtfehler

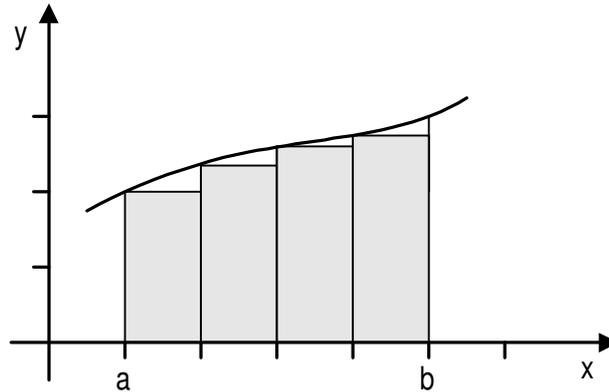


Abbildung 3: Summierte Rechteck-Regel

$$R_{[a,b]} \leq n \cdot M_1 \cdot \frac{h^2}{2} = M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{2n}$$

Der Verfahrensfehler geht zwar für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0, aber der Fehler nimmt nur proportional zu  $n$  ab. Anders ausgedrückt: Um die Genauigkeit um eine Dezimalstelle zu verbessern muss  $n$  verzehnfacht werden.

## 2.2 Trapezregel

Eine wesentliche Verbesserung des numerischen Integralwertes gegenüber des einfachen Rechteckverfahrens lässt sich erzielen, indem statt Rechteckflächen *Trapezflächen* für die Annäherung der Fläche unter der durch die Funktion  $f(x)$  gegebenen Kurve auf einem Intervall  $[a, b]$  verwendet werden. Man nennt diese Approximation **Trapezregel**.

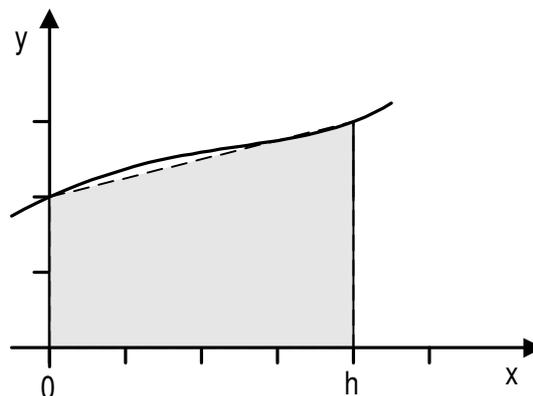


Abbildung 4: Trapez-Regel

Für das Intervall  $[0, h]$  ergibt sich daraus für das Integral die Näherungsformel :

$$\int_0^h f(x) dx \approx h \cdot \frac{f(h) + f(0)}{2}$$

Es stellt sich nun wiederum die Frage, wie groß wohl der Fehler gegenüber dem exakten Integralwert ist. Der Fehler wird durch die Gleichung

$$R(h) = \int_0^h f(x)dx - h \cdot \frac{f(h) + f(0)}{2}$$

bestimmt. Unter der Voraussetzung, dass die Funktion  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, ergibt sich daraus durch zweimalige Differentiation:

$$\begin{aligned} R'(h) &= f(h) - \frac{1}{2} \cdot (f(h) + f(0)) - \frac{h}{2} \cdot f'(h) = \frac{1}{2} \cdot f(h) - \frac{1}{2} \cdot f(0) - \frac{h}{2} \cdot f'(h) \\ R''(h) &= \frac{1}{2} \cdot f'(h) - \frac{1}{2} \cdot f'(h) - \frac{h}{2} \cdot f''(h) = -\frac{h}{2} \cdot f''(h) \end{aligned}$$

$R''$  kann betragsmäßig abgeschätzt werden:

$$|R''(h)| = \frac{h}{2} \cdot |f''(h)| \leq M_2 \cdot \frac{h}{2} \quad \text{wobei } M_2 = \sup_{t \in [0, h]} |f''(t)|$$

Integration ergibt die Fehlerabschätzung

$$|R(h)| \leq M_2 \cdot \frac{h^3}{12}$$

Indem das Intervall, über dem die Funktion integriert werden soll, in kleinere, gleich große Teilintervalle zerlegt wird und die Trapezflächen über diesen Teilintervallen summiert werden, gelangt man zum **Trapezverfahren**.

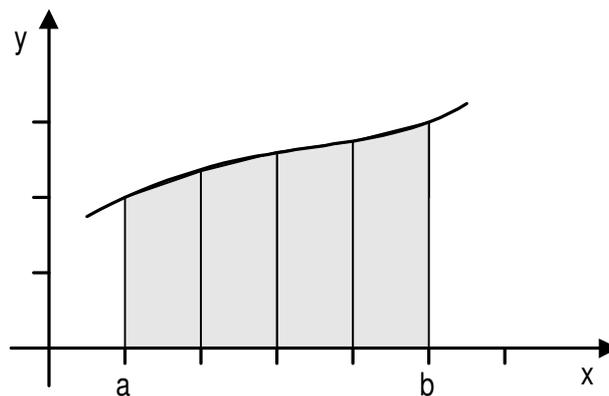


Abbildung 5: Summierte Trapez-Regel

Als Näherung für das Integral einer Funktion  $f$  über ein Intervall  $[a, b]$  erhält man bei einer Zerlegung in  $n$  Teilintervalle der Länge  $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \left\{ f(a) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} 2f(a + i \cdot h) \right) + f(b) \right\}$$

Entsprechend der obigen Fehlerabschätzung beträgt der Gesamtfehler

$$R_{[a,b]} \leq n \cdot M_2 \cdot \frac{h^3}{12} = M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Der Verfahrensfehler nimmt proportional zu  $n^2$  ab.

## 2.3 Simpsonregel

Gegenüber den in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Verfahren (Rechteckregel und Trapezregel) lässt sich eine wesentliche Verbesserung erzielen, wenn die Intervallenden nicht durch eine Gerade, sondern durch Parabelbögen verbunden werden. Dies bringt eine wesentlich bessere Näherung, so dass deutlich weniger Rechenschritte für ein genaues Resultat benötigt werden. Diese Integrationsregel beruht auf der sogenannten *keplerschen Fassregel*, die vom bekannten Astronomen *Johannes Kepler* (1571-1630) vorgestellt wurde, um die Fläche eines solchen fassförmigen Flächenelementes näherungsweise zu bestimmen. Der sonst nicht weiter bekannte englische Mathematiker *Thomas Simpson* (1710-1761) benutzte diese Formel um den Integralwert mit  $n$  Teilflächen zu berechnen.

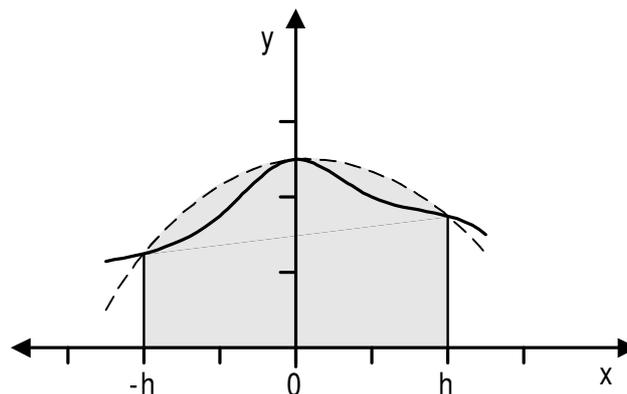


Abbildung 6: Kepler'sche Fassregel

Die Näherungsfläche wird als Parabelbogen, der durch die Punkte  $f(-h)$ ,  $f(0)$  und  $f(h)$  geht, gelegt. Es wird also ein Doppelintervall betrachtet. Der Parabelbogen wird durch die Funktion

$$y(x) = f(0) + \frac{f(h) - f(-h)}{2h}x + \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}x^2$$

beschrieben. Die Integration dieser Parabel über dem Intervall  $[-h, h]$  liefert

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h y(x)dx &= f(0) \cdot 2h + \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \cdot 0 + \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2} \cdot \frac{h^3}{3} \\ &= \frac{h}{3} \{6f(0) + f(h) - 2f(0) + f(-h)\} \\ &= \frac{h}{3} \{f(-h) + 4f(0) + f(h)\} \end{aligned}$$

Für das Integral ergibt sich damit die folgende Näherungsformel:

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx \frac{h}{3}\{f(-h) + 4f(0) + f(h)\}$$

Es stellt sich nun wiederum die Frage, wie groß wohl der Fehler gegenüber dem exakten Integralwert ist. Der Fehler wird durch die Gleichung

$$R(h) = \int_{-h}^h f(x)dx - \frac{h}{3}\{f(-h) + 4f(0) + f(h)\}$$

bestimmt. Unter der Voraussetzung, dass die Funktion  $f$  mindestens dreimal stetig differenzierbar ist, ergibt sich daraus durch dreimalige Differentiation:

$$\begin{aligned} R'(h) &= f(h) + f(-h) - \frac{1}{3}\{f(-h) + 4f(0) + f(h)\} - \frac{h}{3}\{-f'(-h) + f'(h)\} \\ &= \frac{2}{3}f(-h) - \frac{4}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(h) - \frac{h}{3}\{-f'(-h) + f'(h)\} \\ R''(h) &= -\frac{2}{3}f'(-h) + \frac{2}{3}f'(h) - \frac{1}{3}\{-f'(-h) + f'(h)\} - \frac{h}{3}\{-f''(-h) + f''(h)\} \\ &= -\frac{1}{3}f'(-h) + \frac{1}{3}f'(h) - \frac{h}{3}\{-f''(-h) + f''(h)\} \\ R'''(h) &= \frac{1}{3}f''(-h) + \frac{1}{3}f''(h) - \frac{1}{3}\{-f''(-h) + f''(h)\} - \frac{h}{3}\{-f'''(-h) + f'''(h)\} \\ &= -\frac{h}{3}\{-f'''(-h) + f'''(h)\} \end{aligned}$$

$R'''$  kann betragsmäßig abgeschätzt werden:

$$|R'''(h)| = \frac{h}{3} \cdot |f'''(h) - f'''(-h)| \leq \frac{h}{3} \cdot 2 \cdot M_3 \quad \text{wobei } M_3 = \sup_{t \in [-h, h]} |f'''(t)|$$

Integration ergibt die Fehlerabschätzung

$$|R(h)| \leq M_3 \cdot \frac{h^4}{36}$$

Falls die Funktion  $f$  mindestens viermal stetig differenzierbar ist, kann man auf  $R'''$  den Mittelwertsatz anwenden:

$$R'''(h) = \frac{2}{3} \cdot h^2 \cdot f^{(4)}(\xi)$$

Daraus ergibt sich folgende Abschätzung:

$$|R(h)| \leq M_4 \cdot \frac{h^5}{90} \quad \text{wobei } M_4 = \sup_{t \in [-h, h]} |f^{(4)}(t)|$$

Hieraus ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, dass durch die Keplersche Fassregel sogar kubische Parabeln exakt integriert werden.

Indem das Intervall, über dem die Funktion integriert werden soll, in eine gerade Anzahl kleinerer, gleich großer Teilintervalle zerlegt wird und die *keplersche Fassregel* jeweils auf Doppelpartintervallen angewendet wird, gelangt man zum **Simpsonverfahren**.

Als Näherung für das Integral einer Funktion  $f$  über ein Intervall  $[a, b]$  erhält man bei einer Zerlegung in  $n$  Teilintervalle der Länge  $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left\{ f(a) + \left( 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(a + (2i-1) \cdot h) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(a + (2i) \cdot h) \right) + f(b) \right\}$$

Entsprechend der obigen Fehlerabschätzung beträgt der Gesamtfehler

$$R_{[a,b]} \leq \frac{n}{2} \cdot M_3 \cdot \frac{h^4}{36} = M_3 \cdot \frac{(b-a)^4}{72n^3}$$

bzw.

$$R_{[a,b]} \leq \frac{n}{2} \cdot M_4 \cdot \frac{h^5}{90} = M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

Der Verfahrensfehler nimmt also proportional zu  $n^3$  oder sogar  $n^4$  ab.

## 2.4 $\frac{3}{8}$ -Regel

Da das Simpson-Verfahren nur anwendbar ist, wenn die Anzahl der Teilintervalle gerade ist, stellt sich die Frage, wie bei einer ungeraden Anzahl verfahren werden kann. Von Newton stammt eine Formel für die Integration über drei gleichgroße Intervalle der Länge  $h$  (also mit 4 Stützstellen). Wegen ihrer Koeffizienten wird diese Formel auch  $\frac{3}{8}$ -Regel genannt; Newton soll ihr den Namen *Pulcherima*, die Schönste, gegeben haben:

$$\int_0^{3h} f(x)dx \approx \frac{3h}{8} \{ f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h) \}$$

Für den Fehler gilt folgende Abschätzung:

$$|R(h)| \leq M_4 \cdot \frac{3h^5}{80} \quad \text{wobei } M_4 = \sup_{t \in [-h, h]} |f^{(4)}(t)|$$

Die Genauigkeit ist also von der gleichen Ordnung wie die der *keplerschen Fassregel*. Die Formel ist daher in Verbindung mit dem *Simpson-Verfahren* nützlich, wenn die Anzahl der Teilintervalle ungerade ist.

## 2.5 Newton-Cotes-Formeln

Nachdem die Verwendung einer Parabel als Näherung für die zu integrierende Funktion im Simpson-Verfahren zu einer deutlichen Verbesserung des Integralwerts führt, liegt es nahe auch Funktionen höheren Grades zu verwenden. Diese erbringen dann in der Regel eine bessere Genauigkeit des Integralwertes, sind allerdings auch mit einem höheren Rechenaufwand verbunden.

Werden Polynome vom Grad  $n$  mit äquidistanten Stützstellen verwendet, gelangt man zu den sogenannten Newton-Cotes-Formeln, die folgende Gestalt haben:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{j=0}^n g_j^{(n)} f(a + jh)$$

wobei  $h = \frac{b-a}{n}$  für  $n > 1$ . Darüber hinaus gilt  $\sum_{j=0}^n g_j^{(n)} = n$ .  $n = 0$  ist ein Sonderfall, für den  $h = b - a$  und  $g_0^{(0)} = 1$  gilt. Für  $n = 0, 1, 2$  und  $3$  entsprechen die Newton-Cotes-Formeln den bereits vorgestellten Verfahren. In der nachfolgenden Tabelle sind die Namen, Koeffizienten und Fehlerabschätzungen für die ersten Newton-Cotes-Formeln aufgelistet.

$n$	Name	Koeffizienten $g_j^{(n)} (j = 0, 1, \dots, n)$	Fehlerabschätzung
0	Rechteckregel	1	$M_1 \frac{h^2}{2}$
1	Trapezregel	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	$M_2 \frac{h^3}{12}$
2	Simpson-Regel	$\frac{1}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{1}{3}$	$M_4 \frac{h^5}{90}$
3	3/8-Regel	$\frac{3}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{3}{8}$	$M_4 \frac{3h^5}{80}$
4	Milne-Regel	$\frac{14}{45} \quad \frac{64}{45} \quad \frac{24}{45} \quad \frac{64}{45} \quad \frac{14}{45}$	$M_6 \frac{8h^7}{945}$
5		$\frac{95}{288} \quad \frac{375}{288} \quad \frac{250}{288} \quad \frac{250}{288} \quad \frac{375}{288} \quad \frac{95}{288}$	$M_6 \frac{275h^7}{12096}$
6	Weddle-Regel	$\frac{41}{140} \quad \frac{216}{140} \quad \frac{27}{140} \quad \frac{272}{140} \quad \frac{27}{140} \quad \frac{216}{140} \quad \frac{41}{140}$	$M_8 \frac{9h^9}{1400}$

Für größere  $n$  treten negative Gewichte auf, und die Newton-Cotes-Formeln werden numerisch unbrauchbar.

## 2.6 Gauß-Formeln

Bei den bisher vorgestellten Formeln und Verfahren wurde das Intervall  $[a, b]$ , über das eine Funktion zu integrieren war, stets in gleichgroße Teilintervalle unterteilt. Bei Verwendung von  $n$  Teilintervallen konnten so Quadraturformeln gewonnen werden, mit denen Polynome  $n$ -ten Grades exakt integriert werden konnten.

Es stellt sich die Frage, ob nicht durch eine günstigere Wahl der Stützstellen Quadraturformeln konstruiert werden können, mit denen Polynome von höherem als  $n$ -tem Grad exakt integriert werden können. Tatsächlich gibt es Quadraturformeln, die bei Verwendung von  $n + 1$  Stützstellen jedes Polynom bis höchstens vom Grad  $2n + 1$  exakt integrieren. Diese Formeln heißen *Gauß-Formeln* und haben folgende Gestalt:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{j=0}^n \omega_j f(x_j)$$

Die Funktion  $w(x)$  heisst *Gewichtsfunktion*, wobei im Intervall  $[a, b]$  gelten muss  $w(x) > 0$ .

Die Stützstellen  $x_j$  und die Gewichte  $\omega_j$  werden so bestimmt, dass sich ein möglichst hoher Exaktheitsgrad ergibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Koeffizienten dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\int_a^b x^i w(x) dx = (b-a) \sum_{j=0}^n \omega_j x_j^i \quad i = 0, 1, \dots, 2n+1$$

genügen. Die Berechnung der Stützstellen und Gewichte erfolgt jedoch nicht durch Lösung dieses Gleichungssystems, sondern durch eine Methode, die in vereinfachter Form zuerst von *Gauß* vorgeschlagen wurde. Eine ausführlichere Diskussion der Methode würde allerdings an dieser Stelle den Rahmen sprengen. Daher soll nur die sogenannte *Gauß-Tschebyscheff-Formel* als Beispiel angeführt werden:

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{j=0}^n f\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right)\right)$$

### 3 Praktische Aspekte der numerischen Integration

In der Praxis treten häufiger verschiedene Problemfälle auf, die im folgenden etwas näher betrachtet werden sollen. Die Problemfälle beruhen alle darauf, dass die Voraussetzungen für eine gute Konvergenz der Verfahren verletzt werden. Dies ist dann gegeben, wenn die jeweiligen Fehlerabschätzungsformeln nicht angewandt werden können.

#### 3.1 Fehlerabschätzung

Eines der Hauptprobleme bei der numerischen Integration ist die Gewinnung realistischer Schätzungen für die Fehler. Die bei den vorgestellten Verfahren hergeleiteten „a-priori“-Abschätzungen sind dazu in der Regel ungeeignet, da höhere Ableitungen des Integranden häufig nur schwer zu berechnen sind.

Bei Quadraturformeln, die von einem Schrittweitenparameter  $h$  abhängen, kann mit Hilfe der tatsächlich berechneten Werte eine „a-posteriori“-Abschätzung bestimmt werden, indem man den Integralwert sowohl mit der Schrittweite  $h$  als auch mit halbiertes Schrittweite  $\frac{h}{2}$  berechnet. Als Maß für den Fehler kann die betragliche Differenz dienen. Ist diese kleiner als eine vorgegebene Toleranzgrenze, so wird der Approximationsprozess abgebrochen. Andernfalls wird die Schrittweite weiter verringert, bis eine vorgegebene minimale Schrittweite unterschritten wird, denn dann ist das Integral offenbar nicht mit vertretbarem Aufwand verlässlich berechenbar.

Bei vergleichbarem Rechenaufwand liefern die *Gauß-Formeln* die genauesten Resultate. Nur ist es leider „a-priori“ kaum möglich, die optimale Schrittweite  $h$  zu bestimmen. Da beim Übergang zur halbierten Schrittweite die bis dahin berechneten Funktionswerte nicht weiterverwendet werden können, gehen die Vorzüge der *Gauß-Formeln* schnell verloren.

In manchen Fällen kann man mit sogenannten adaptiven Verfahren eine Verbesserung der Genauigkeit erreichen. Diese Verfahren arbeiten nicht mehr mit konstanter Schrittweite, sondern

rechnen an den kritischen Stellen mit einer feineren Schrittweite.

### 3.2 Uneigentliche Integrale

Bei den vorgestellten Verfahren wurde stets vorausgesetzt, dass die Integranden der numerisch zu bestimmenden Integrale hinreichend oft differenzierbare Funktionen sind. In der Praxis kommen jedoch häufig auch Integranden mit Singularitäten oder uneigentliche Integrale vor.

Betrachtet man beispielsweise das – natürlich als konvergent vorausgesetzte – uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

so kann man versuchen, das Integral durch eine Variablensubstitution in ein Integral mit endlichen Grenzen zu transformieren. Setzt man etwa  $t = e^{-x}$ , d.h.  $x = -\ln t$ , so folgt

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = - \int_1^0 \frac{f(-\ln t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{f(-\ln t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{g(t)}{t} dt$$

Ist  $\frac{g(t)}{t}$  in der Umgebung von  $t = 0$  beschränkt, so kann das Integral mit einem der üblichen numerischen Integrationsverfahren berechnet werden. Andernfalls versagt die Methode.

Eine weitere Möglichkeit, sich dem Integralwert des uneigentlichen Integrals anzunähern, ist, eine Folge von Zahlen  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$  zu wählen und das Integral als Summe von eigentlichen Integralen umzuschreiben:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{a_1} f(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx$$

Die Rechnung wird nach  $n$  Teilintegralen abgebrochen, wenn der Betrag des letzten Teilintegrals hinreichend klein ist. Damit ist natürlich noch nicht sichergestellt, dass auch

$$\int_{a_n}^{\infty} f(x) dx$$

betragsmäßig hinreichend klein ist. Dies muss durch theoretische oder experimentelle Untersuchungen abgeklärt werden.

### 3.3 Integrale mit Singularitäten

Eine Funktion heißt bekanntlich *Riemann-integrierbar*, wenn sie im Integrationsintervall beschränkt ist und höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen hat. Numerische Verfahren wie etwa das *Simpson-Verfahren* liefern für stetige Funktionen in der Regel eine gute Approximation. Enthält der Integrationsbereich jedoch eine (oder mehrere) Unstetigkeitsstellen, so können die

Teilflächen mit diesen Unstetigkeitsstellen nur sehr ungenau approximiert werden. Dies äußert sich in einer mehr oder weniger großen Abweichung vom exakten Integralwert.

Als Beispiel soll folgende bei 0 unstetige Funktion im Intervall  $[-1, +1]$  mit dem Simpson-Verfahren integriert werden:

$$f(x) := \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Als exakter Wert müsste sich natürlich 0 ergeben. Für verschiedene Anzahlen von Teilintervallen ergeben sich mehr oder minder große Abweichungen:

$n$	Simpson(n)
2	-1.33333333
10	0.26666667
100	0.01333333

Offensichtlich ist die Formel für die Fehlerabschätzung nicht anwendbar, da die Funktion nicht stetig differenzierbar ist.

Falls die Funktion  $f(x)$  oder ihre erste Ableitung an den Stellen  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$  endliche Unstetigkeiten besitzt, dann kann das Integral als Summe der Integrale über den jeweiligen Teilintervallen ausgedrückt werden:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \int_{x_n}^b f(x)dx$$

Auf die Teilintervalle können die üblichen numerischen Verfahren angewandt werden.

Schwieriger ist in der Regel die numerische Berechnung von Integralen, bei denen der Integrand Unendlichkeitsstellen besitzt. Eine Möglichkeit besteht in einem solchen Fall manchmal darin, eine geeignete Variablensubstitution durchzuführen. Eine weitere Möglichkeit stellt die Entwicklung des Integranden in eine Taylor-Reihe dar.

## 4 Zusammenfassung

Die numerische Integration ist eine der ältesten Disziplinen der numerischen Mathematik. Entsprechend umfangreich ist die Literatur auf diesem Gebiet. In dieser Ausarbeitung konnte daher nur ein Schlaglicht auf die vielfältigen Berechnungsmethoden geworfen und die grundlegendsten Verfahren ausführlicher dargestellt werden. Daneben existieren jedoch noch viele, viele andere Methoden, die sich in der Bestimmung der Intervallzerlegung oder der Bildung und Verrechnung der Flächen unterscheiden.