

Prüfungsprotokoll

Kurs: Wahrscheinlichkeitstheorie II (01263) und Bedingte Erwartungswerte und Verteilungen (01356)

Datum: 22.02.2008, 11:00 Uhr, Dauer: ca. 45 min

Prüfer: Dr. Grycko

Beisitzer: M. Blankenagel

Note: 1,0

Nach einem kurzen Gespräch mit den Prüfern begann die Prüfung.

Hier die Fragen, die Dr. Grycko gestellt hat zusammen mit Zwischenfragen von ihm sowie kleinen Hinweisen, die ich bei der Beantwortung der Fragen gegeben habe.

Fragen Wahrscheinlichkeitstheorie II (01263):

- Ich gebe Ihnen mal als Starthilfe einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Wie ist die Konvergenz im p -ten Mittel definiert? Was ist überhaupt p ?
 - $1 \leq p < \infty$
 - Konvergenz im p -ten Mittel mit der Metrik d_p erklärt.
- Wie ist denn die Metrik definiert? Schreiben Sie das mal als Integral hin.
 - $d_p(f, g) := [\int |f - g|^p d\mu]^{1/p}$
- Wieso schließt man denn $p < 1$ aus?
 - Konnte ich nichts zu sagen...
- Sagt Ihnen die Ungleichung von Minkowski etwas?
 - Minkowski-Ungleichung wiedergegeben (wieder für mich etwas umständlich mit ausgeschriebenen Integralen). Diese wird als Dreiecksungleichung auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ verwendet. Dr. Grycko erklärte mir dann, dass für $p < 1$ die Dreiecksungleichung nicht mehr gültig ist und man deswegen $p < 1$ ausschließt.
- Kennen Sie die Höldersche Ungleichung?
 - Höldersche Ungleichung erklärt. Kurz erläutert, dass man die Hölder-Ungleichung im Beweis der Minkowski-Ungleichung verwendet.
- In einem Spezialfall folgt aus der Hölderschen Ungleichung eine andere bekannte Ungleichung aus W'theorie I, wissen Sie welche?
 - CSB-Ungleichung für $p = q = 2$.
- Ich gebe Ihnen wieder einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, was ist denn ein stochastischer Kern und was brauchen Sie noch für ein Datum, um diesen definieren zu können?
 - Wusste erst nicht, was Herr Dr. Grycko noch als Voraussetzung aufgeschrieben haben wollte, daher hab ich einfach die Definition eines stochastischen Kerns erzählt.
 - Erklärt, was ein stochastischer bzw. σ -endlicher Kern ist.

- Was können Sie denn mit einem σ -endlichen Kern K_2^1 und einem σ -endlichen Maß μ_1 machen?
 - Ich kann eine Verallgemeinerung des Produktmaßes $\mu_1 \otimes K_2^1$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ definieren.
- OK, dann geben Sie mal das Maß an.
 - Ich hab das Produktmaß zunächst mit $\mu(A_1 \times A_2) = \dots$ erklären wollen...
- Ja, das wollte ich jetzt eigentlich nicht, dass Sie das Maß mit der Menge der messbaren Rechtecke definieren.
 - Definition $\mu(A) := \int K_2^1(\omega_1, A_{\omega_1}) d\mu_1$ für alle $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gegeben. Hab zuerst das Integral nicht hinbekommen, nach so 30 Sekunden Bedenkzeit ging es dann.
- Was kann ich denn mit dem Maß machen?
 - Verallgemeinerung des 1. Fubinisches Satzes erzählt.
- Ich geben Ihnen als Starthilfe einen W'raum (Ω, \mathcal{A}, P) und eine Folge von Zufallsvariablen. Was versteht man denn unter dem Gesetz der großen Zahlen?
 - Drei Gesetze entsprechend der Konvergenzarten erklärt.
- Wie hängen denn die Konvergenzarten zusammen?
 - Konvergenz P -f.ü. und Konvergenz im p -ten Mittel bedingen jeweils die P -stochastische Konvergenz.
- Nennen Sie hinreichende Kriterien für die Gültigkeit des Starken Gesetzes der Großen Zahlen.
 - Beim Vorliegen von i.i.d. ZVen, falls die Varianzen beschränkt sind und falls für $t_i := i, i \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{V(X_i)}{t_i^2}$ konvergiert.
- Und für das Schwache Gesetz der Großen Zahlen?
 - Hatte keine Ahnung, ob so eine Bedingung überhaupt im Skript stand, Dr. Grycko hat dann eine ähnliche Reihe mit den Varianzen angegeben, bei deren Konvergenz wohl das Schwache Gesetz gilt.
- Mhh, ich würde noch gerne zum Zentralen Grenzwertsatz kommen...
 - Kurz gefragt, ob ich den angeben soll, Dr. Grycko stimmte zu und ich gab den ZGS wieder.
 - Ist die Lindeberg-Bedingung erfüllt, so gilt der ZGS. Lindeberg-Bedingung angegeben und gesagt, dass diese bei i.i.d. ZVen gilt und, falls die Ljapunow-Bedingung erfüllt ist. Alles auch jeweils explizit hingeschrieben.'
- Wieso braucht man denn noch die Ljapunow-Bedingung? Welche Bedingung ist stärker?
 - Leichter überprüfbar? Ljapunow-Bedingung ist stärker, weil sie die Lindeberg-Bedingung impliziert. Dem stimmte Dr. Grycko zu, und ich war froh, dass er nicht weiter nachgefragt hat.

Fragen Bedingte Erwartungswerte und Verteilungen (01356):

- Ich geben Ihnen wieder als Starthilfe einen W'raum (Ω, \mathcal{A}, P) und eine ZV X . Was ist ein bedingter Erwartungswert? Auf meine Nachfrage sollte ich den b. EW von X unter einer Unter- σ -Algebra definieren.
 - Definition gegeben.
- Beweisen Sie die Existenz des bedingten Erwartungswertes. Ist dieser eindeutig?
 - Beweis über Satz von Radon-Nikodym. Nur P -f.ü. eindeutig.
- Nennen Sie die Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes.
 - Alles runtergeschrieben, also die ganzen Eigenschaften die im Skript stehen. Hat mich etwas gewundert, dass ich nicht unterbrochen wurde.
- Definieren Sie den faktorisierten bedingten Erwartungswert. Beweisen Sie die Existenz eines solchen f.b. EWes.
 - Definition gegeben und den Existenzbeweis mit Hilfe des Faktorisierungssatzes geführt.
- Erklären Sie, was eine bedingte Verteilung von X unter einer ZV Y ist.
 - Definition gegeben.
- Wann existiert diese?
 - Wenn der Bildraum von X ein euklidischer Messraum ist. Sollte dann erklären, warum dies so ist. Ich kann ja die bedingte Verteilung einfach so definieren. Wusste die Antwort nicht, Herr Dr. Grycko half mir dann. Für die Definition muss natürlich für jedes A' der bedingte EW existieren.
- Sagt Ihnen der Begriff der suffizienten Statistik etwas? Kommt der in dem Kurs vor?
 - Ja, der kommt vor;-) Sollte dann erstmal die Motivation erläutern, also das Ausschöpfen der Information von $P_{\gamma, T}$ um Rückschlüsse auf P_γ ziehen zu können.
 - Definition gegeben. Zuerst den Allquantor für $(\gamma \in \Gamma)$ vergessen. Hab den dann noch hinzugefügt.

Ende

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:

Dr. Grycko ist uneingeschränkt als Prüfer zu empfehlen. Er ist sehr nett und prüft auch sehr angenehm. Wie auch schon im Grundstudium erwartet er bei den Antworten, die man aufschreibt, präzise Formulierungen von Sätzen/Voraussetzungen und insb. den Definitionen von Abbildungen. Der Eindruck aus den übrigen Protokollen, dass ihm die Formulierung von Def.- und Wertebereichen bei Abbildungen sowie die Abbildungsvorschrift sehr wichtig sind, kann ich nur bestätigen. Hatte eine erheblich schlechtere Note erwartet, eine 1,7 wäre durchaus gerecht gewesen. Bin also mehr als zufrieden mit der Prüfung.